数理解析研究所講究録
574巻 1985年 101-113

A Local Stable Manifold Theorem for Random Dynamical Systems

阪大 理 盛田健彦 (Takehiko Morita)

ここでは Ruelle [5] で得られた結果を map の random iteration として定義された random dynamical system に応用して、可微分な random dynamical system に対する local stable manifold の存在を導くことを考える。

1. Random Dynamical System と Skew Product Transformation

我々が扱おうとする random dynamical system とは何かということを明確にしておかねばならない.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし $\sigma : \Omega \to \Omega$ はその上の P を保存する変換とする。今、二つの可測空間 $(M, \mathcal{B}(M))$, $(S, \mathcal{B}(S))$ が与えられているとし $S \times M$ から S への

$\mathcal{B}(S\times M)|\mathcal{B}(M)$-可測な map $f:(s,x)\longmapsto f_s x$ と分布が ν であるような $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の S-値確率変数 ξ が与えられているとする。$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\xi_n(\omega)=\xi\circ\sigma^{n-1}(\omega)$ $(n\geqq 1)$ で定義される確率変数列とすれば これは $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の S-値定常過程となる.

定義 1.1. $X_n(\omega)=f_{\xi_n(\omega)}X_{n-1}(\omega)$ $(n\geqq 1)$, $X_0(\omega)=id_M$ で与えられる random な map の合成からなる列 $X=\{X_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ を random dynamical system という.

random dynamical system の挙動を調べる上で次の変換が重要である。

定義 1.2 $M\times\Omega$ 上の変換 T を $(x,\omega)\in M\times\Omega$ に対し $T(x,\omega)=(f_{\xi_1(\omega)}x,\sigma\omega)=(X_1(\omega)x,\sigma\omega)$ で定義する.

以後. ξ_n は独立で $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ であることを仮定する. このとき各 $x\in M$ に対し $X(x)=\{X_n(\omega)x\}_{n=0}^{\infty}$ は出発点が x でその推移確率が $p(y,A)=\int 1_A\circ X_1(\omega)y\,P(d\omega)$

で与えられる Markov 過程になる。この条件下で X と T の関係を述べる前に、次の概念を導入しておく。

<u>定義 1.3.</u>　Q, μ をそれぞれ $M\times\Omega$, M 上の確率測度とするとき

1)　任意の $\Gamma\in\mathcal{B}(M)\times\mathcal{F}$ に対して $Q(T^{-1}\Gamma)=Q(\Gamma)$ が成立するとき Q は T-invariant であるという。

2)　Q が T-invariant かつ $\Gamma\in\mathcal{B}(M)\times\mathcal{F}$ が $T^{-1}\Gamma=\Gamma$ なる限り $Q(\Gamma)=0$ or $Q(\Gamma)=1$ のとき Q は T-ergodic であるという。

3)　任意の $A\in\mathcal{B}(M)$ に対して $\mu(A)=\int p(x,A)\mu(dx)$ が成立するとき μ は X-invariant であるという。

4)　μ が X-invariant で $A\in\mathcal{B}(M)$ に対し $p(x,A)=1$ μ-a.e. $x\in A$ が成立するとき $\mu(A)=0$ or $\mu(A)=1$ となるならば μ は X-ergodic であるという。

次の命題は Markov 過程 X と変換 T とのエルゴード論的な関係を与えている。

<u>命題 1.1.</u>　μ を $\mathcal{B}(M)$ 上の確率測度とするとき

1) μ が X-invariant であることと $\mu\times P$ が T-invariant であることは同値である.

2) μ が X-ergodic であることと $\mu\times P$ が T-ergodic であることは同値である.

<u>命題 1.2.</u> μ が X-invariant であるとする. このとき $M\times\Omega$ 上の可測函数 Φ が $\Phi\circ T(x,\omega)=\Phi(x,\omega)$ $\mu\times P$-a.e. ならば M 上の可測函数 φ があって $\Phi(x,\omega)=\varphi(x)$ $\mu\times P$-a.e. となる. すなわち T-invariant な函数は ω (sample, randomness) によらない.

これらの証明は [2], [3] を見られるとよい.

2. A Random Version of the Multiplicative Ergodic Theorem

X を random dynamical system とし μ を X-invariant とする. $S\times M$ から $k\times k$ 実行列全体 M_k の中への可測写像 $D(\cdot,\cdot):(s,x)\longmapsto D(s,x)$ を考える.

$$(2.1)\quad D^n(x,w) = D(\xi_n(w), X_{n-1}(w)x)\cdot\cdots\cdot D(\xi_1(w), x)$$

とおくとき 次を得る.

定理 2.1. ([4], [5])

$$(2.2)\quad \int \log^+ \|D(s.x)\|\, \nu(ds)\mu(dx) < \infty .$$

とすれば. $\mathcal{B}(M)$-可測函数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, m_1, m_2, \ldots m_k$, s と $\Gamma \in \mathcal{B}(M)\times\mathcal{F}$ で次を満たすものが存在する.

(1) $m_1, m_2, \ldots, m_k, s$ は非負整数値をとり $0 < s(x) \leq k$, $m_i(x) > 0$ $(i \leq s(x))$, $m_i(x) = 0$ $(i > s(x))$ かつ $\sum_{i=1}^{k} m_i(x) = k$.

(2) $-\infty \leq \lambda_1(x) = \cdots = \lambda_{m_1}(x) < \lambda_{m_1+1}(x) = \cdots = \lambda_{m_1+m_2}(x) < \cdots < \lambda_{m_1+\cdots+m_{s-1}+1}(x) = \cdots = \lambda_k(x)$ であり, $\lambda_i^+ \in L^1(\mu)$ である.

(3) $(\mu\times P)(\Gamma) = 1$ で $T\Gamma \subset \Gamma$.

(4) $(x,w) \in \Gamma$ なる限り

$$(2.3)\quad \lim_{n\to\infty} [D^n(x,w)^* D^n(x,w)]^{\frac{1}{2n}} = \Lambda(x,w)$$

が存在し $\Lambda(x,w)$ の固有値が丁度 $\exp\lambda^{(1)}(x) < \cdots \exp\lambda^{(s)}(x)$ になる. ここで $\lambda^{(i)}(x)$ は λ_i's の相異なる値を表わす.

(5)　各固有値に対応する固有空間を $U^{(1)}(x,\omega), U^{(2)}(x,\omega), \dots, U^{(s)}(x,\omega)$ とすれば $\dim U^{(i)}(x,\omega) = m_i(x)$.

(6)　$V^{(0)}(x,\omega) = \{0\}$, $V^{(i)}(x,\omega) = U^{(1)}(x,\omega) + \dots + U^{(i)}(x,\omega)$ $(i \geq 1)$ とすれば $u \in V^{(i)}(x,\omega) \setminus V^{(i-1)}(x,\omega)$ なる限り

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| D^n(x,\omega)u \| = \lambda^{(i)}(x). \tag{2.4}$$

である.

<u>証明</u>　命題 1.1 から $\mu\times P$ は T-invariant であるから Ruelle [5] の Theorem 1.6 においてて, ρ, $T(x)$ のところへ T, $\mu\times P$, $D(\xi_1(\omega), x)$ を代入すれば $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$, $m_1, \dots, m_\ell$, s が x のみの函数であるという主張をのぞいて 定理 2.1 は証明されたことになる. ところが. これらの函数は T-invariant であるので 命題 1.2 を用いれば x のみの函数であると見做せる. //

<u>注意</u>　勿論 μ が X-ergodic ならば $\mu\times P$ が T-ergodic となり λ_i, m_i, s は $\mu\times P$-a.e. に constant である.

<u>定義 2.1</u>　上の $\lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(s)}$ を $D(\cdot,\cdot)$ の Lyapunov exponents という.

3. A Random Version of Ruelle's Non-linear Ergodic Theorem

この節では [5] の Theorem 5.1 から、x を index とする map の族 F_x の定義域が x によらずに $\overline{B}(1)$ であるという仮定をのぞくことにより random dynamical system に対する non-linear ergodic theorem を導く。

μ を X-invariant とする。整数 $r \geq 1$ と $\theta \in (0,1]$, $S \times M$ 上の正値可測写像 ρ が与えられているとする。$(s,x) \in S \times M$ に対し $C^{r,\theta}(\overline{B}(\rho(s,x)), 0; \mathbb{R}^k, 0)$ の元 $F(s,x)$ が対応しているとする。但し $C^{r,\theta}(\overline{B}(\rho), 0; \mathbb{R}^k, 0)$ は、半径 ρ 中心 0 の $\mathbb{R}^k$ の閉球から $\mathbb{R}^k$ への $C^{r,\theta}$-map G で $G(0)=0$ なるものの全体とする。と定義することが可能なら $F^n(x,\omega) = F(\xi_n(\omega), X_{n-1}(\omega)x) \circ \cdots \circ F(\xi_1(\omega), x)$ とおき、$DF(s,x)$ で $F(s,x)$ の 0 での微分をあらわすものとする。このとき、

定理 3.1 $(s,x) \mapsto DF(s,x)$, $\|F(s,x)\|_{r,\theta}$ が可測で

(3.1) $$\int \log^{-} \rho(s,x)\,\nu(ds)\,\mu(dx) < \infty$$

かつ

(3.2) $$\int \log^{+} \| F(s,x) \|_{r,\theta}\,\nu(ds)\,\mu(dx) < \infty$$

とする．$\lambda<0$ とするとき $DF(s,x)$ の Lyapunov exponents は $\mu\times P$-a.e. で λ とも $-\infty$ とも異なるものとする．このとき $(\mu\times P)(\Gamma)=1$ なる可測集合 $\Gamma\subset M\times\Omega$ と Γ 上で定義された可測函数 $\beta>\alpha>0$，$\gamma\geq 1$ で次の性質をもつものが存在する．

(1) $(x,\omega)\in\Gamma$ のとき集合

(3.3) $\mathcal{V}^{\lambda}_{(x,\omega)}=\{u\in\overline{B}(\alpha(x,\omega))\,;\,\|F^{n}_{(x,\omega)}u\|\leq\beta(x,\omega)e^{n\lambda},\ n\geq 0\}$

は 0 で $V^{(p)}_{(x,\omega)}$ を接空間とする $\overline{B}(\alpha(x,\omega))$ の $C^{r\theta}$-submanifold になる．但し $p=\max\{i\,;\,\lambda^{(i)}(x)<\lambda\}$．

(2) $u,v\in\mathcal{V}^{\lambda}_{(x,\omega)}$ ならば

(3.4) $\|F^{n}_{(x,\omega)}u-F^{n}_{(x,\omega)}v\|\leq\gamma(x,\omega)e^{n\lambda}$

がすべての $n\geq 0$ に対して成立する．

略証．もし $\rho(s,x)$ が (s,x) に依らなければこの定理は [5] Theorem 5.1 において τ, ρ, F_x を $T, \mu\times P, DF(\xi_1(\omega),x)$ に置き換えればよい．しかし $\rho(s,x)$ が (s,x) に依るときには Theorem 5.1 の証明

法がそのまま使えるように $\beta(x,\omega)$ を

$$\beta(x,\omega)\, e^{n\lambda} < \rho(\xi_{n+1}(\omega),\ X_n(\omega)x) \quad \forall n \geq 0$$

なるように選ばねばならない。ところがこれは仮定(3.1)により保証される。 //

4. A Local Stable Manifold Theorem for Random Dynamical Systems

この節では我々の目標である可微写像の random iteration によって定義される random dynamical system に対する local stable manifold の存在定理を述べる。M を k 次元 compact smooth manifold S は M 上の $C^r(r \geq 2)$ 写像の全体とし $f_s x = s(x)$ すなわち $X_n(\omega)x = \xi_n(\omega)\xi_{n-1}(\omega)\cdots\xi_1(\omega)x$ とする。μ を X-invariant とする。(実はこの場合 Markov 過程の一般論からこのような μ の存在は容易に示せる。). 次の仮定をおく。

(4.1) $$\int \log^+ \|s\|_r\, \nu(ds) < \infty$$

但し $\|s\|_r$ は map $s \in C^r(M \to M)$ の C^r-norm.

この (4.1) の下で次の結果を得る.

定理 4.1 (1) $\Gamma \subset \Gamma$, $(\mu \times P)(\Gamma) = 1$ なる $M \times \Omega$ の可測部分集合 Γ がとれて, $(x, \omega) \in \Gamma$ なる限り filtration $\{0\} = V^{(0)}_{(x,\omega)} \subsetneq V^{(1)}_{(x,\omega)} \subsetneq \cdots \subsetneq V^{(s(x))}_{(x,\omega)} = T_xM$ と数 $-\infty \leq \lambda^{(1)}(x) < \lambda^{(2)}(x) < \cdots < \lambda^{(s(x))}(x)$ が定まり $u \in V^{(i)}_{(x,\omega)} \setminus V^{(i-1)}_{(x,\omega)}$ なる限り

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| DX_n(\omega)(x)u \|_{X_n(\omega)x} = \lambda^{(i)}(x)$$

をみたす. ここで $\|\cdot\|_x$ は M の Riemann 計量から導かれた T_xM 上のノルムである.

(2) $\lambda < 0$ に対して Γ^λ を

$$\Gamma^\lambda = \{(x, \omega);\ \lambda^{(i)}(x) \notin \{\lambda, -\infty\}, i = 1, 2, \ldots, s(x)\}$$

とおけば Γ^λ 上の可測函数 $\beta > \alpha > 0$, $\gamma \geq 1$ で次の性質をもつものが存在する.

a) $(x, \omega) \in \Gamma^\lambda$ ならば

$$V^\lambda(x, \omega) = \{y \in \overline{B}(x, \alpha(x, \omega)) : d(X_n(\omega)x, X_n(\omega)y) \leq \beta(x, \omega)e^{n\lambda},\ n \geq 0\}$$

は $x \in M$ で $V^{(p)}_{(x,\omega)}$ を接空間とする $\overline{B}(x, \alpha(x, \omega))$ の C^{r-1}-submanifold である. 但し $p = \max\{i; \lambda^{(i)}(x) < \lambda\}$

b) $y, z \in V^\lambda(x, \omega)$ ならば

$$d(X_n(w)y, X_n(w)z) \leq \gamma(x;w)\, d(y,z)\, e^{n\lambda}$$

がすべての $n \geq 0$ に対して成立する.

略証　M は compact であるから, 任意の $x \in M$ に対して $\overline{B}(x,1)$ が x の normal coordinate neighbourhood に含まれると仮定してよい. $S \times M$ 上の函数 f を

$$f(s,x) = \frac{1}{1 + \sup_{y \in B(x,1)} \|(Ds)(y)\|}$$

で定義する. 但し $(Ds)(y)$ は s の y における微分をあらわす. するとこの $f(s,x)$ は (4.1) を用いると条件 (3.1) を満たすことが確かめられる. ψ を Riemannian trivialization とする. すなわち ψ は TM から $M \times \mathbb{R}^k$ の上への両可測写像で $u, v \in T_xM$ に対し $(\psi_x u, \psi_x v) = (u,v)_x$ をみたす. ここで $(\cdot,\cdot)_x$ は T_xM の Riemannian inner product を $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^k$ の Euclidean inner product をあらわすものとする. $F(s,x) : \overline{B}(f(s,x)) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ を

$F(s,x) = \psi_{s(x)} \circ \mathrm{Exp}_{s(x)}^{-1} \circ s \circ \mathrm{Exp}_x \circ \psi_x^{-1}$ で定義すれば $DF(s,x)(0) = \psi_{s(x)} \circ Ds(x) \circ \psi_x^{-1}$ であり

仮定 (4.1) から $F(s,x)$ は条件 (3.2) を

$DF(s,x)$ は条件 (2.2) を満たす．従って定理 4.1 の主張は定理 3.1 から容易に導かれる． //

注意　我々は離散時間の場合を扱ったが，連続時間の場合に関しては Carverhill が [1] で確率微分方程式の定める flow に対する結果を出している。

References

[1] A. Carverhill, Flows of stochastic dynamical systems : ergodic theory, Stochastics. 14 (1985). 273-318.

[2] T. Morita, Random iteration of one-dimensional transformations, Osaka J. Math. 22 (1985) 489-518.

[3] T. Morita, A Local stable manifold theorem for random dynamical systems to appear.

[4] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic

numbers, Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197–221.

[5] D. Ruelle, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, Publ. IHES. 50 (1979) 275–305.